

James Boswell Examen

VWO Wiskunde B – Voorbeeldexamen 1

Datum:

Tijd: 3 uur

Aantal vragen: 6

Aantal subvragen: 16

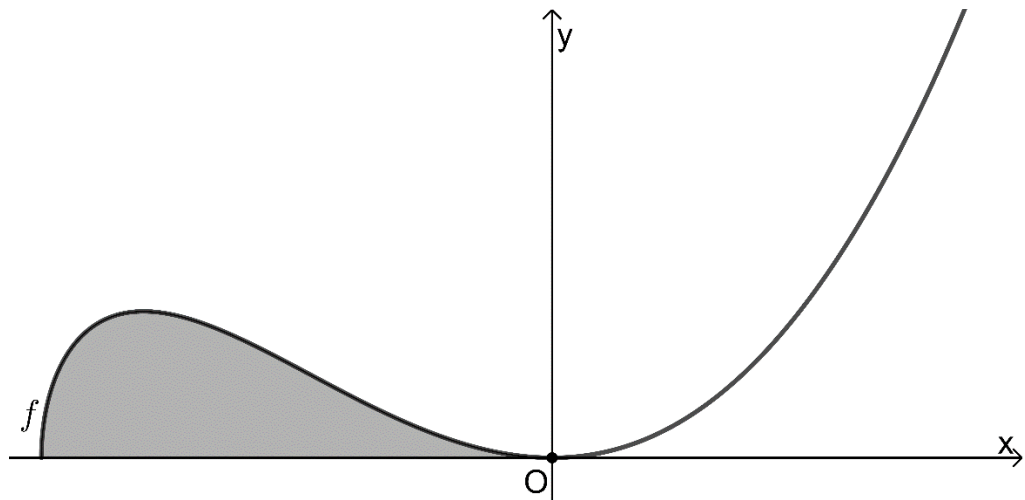
Aantal bijlagen: 0

Totaal aantal punten: 81

- Vermeld op ieder vel papier uw naam.
- Begin opgaven 1 t/m 6 op een nieuw vel papier.
- Laat bij iedere opgave door middel van een berekening of motivatie zien hoe het antwoord verkregen is (ook bij gebruik van de grafische rekenmachine). Aan een antwoord zonder berekening of toelichting worden geen punten toegekend.
- Schrijf goed leesbaar met inkt. Het gebruik van tipp-ex e.d. of het schrijven met potlood is niet toegestaan. Gebruik een potlood uitsluitend voor het maken van tekeningen.
- Toegestane hulpmiddelen:
 - Grafische rekenmachine (zonder CAS-systeem);
 - Tekenmateriaal;
 - Geodriehoek en passer.

Opgave 1. Gegeven is de functie $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x+1}$. In figuur 1.1 is de grafiek van f getekend.

Figuur 1.1



Het punt $A\left(-\frac{3}{4}, \frac{9}{32}\right)$ is een punt op de grafiek van f . Lijn ℓ is de raaklijn aan de grafiek van f in punt A .

- 5p a. Toon op exacte wijze aan dat lijn ℓ gegeven wordt door: $\ell: y = -\frac{3}{16}x + \frac{9}{64}$.

V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de x -as. In figuur 1.1 is vlakdeel V grijsgekleurd.

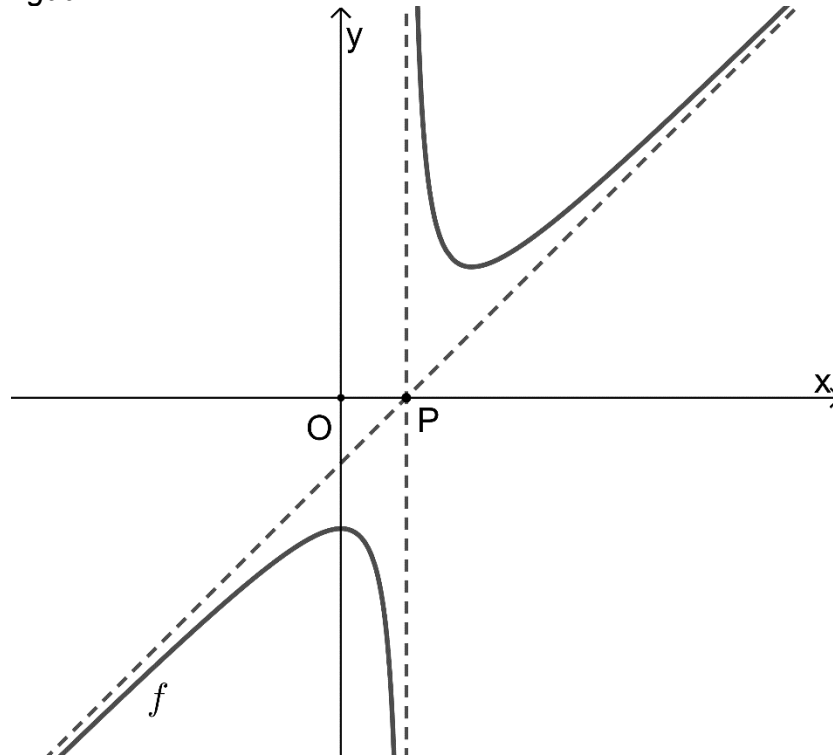
Vlakdeel V wordt gewenteld om de x -as.

- 6p b. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

Opgave 2. Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

In figuur 2.1 is de grafiek van f getekend, samen met zijn verticale en scheve asymptoot.

Figuur 2.1



Punt P heeft coördinaten $(1, 0)$.

5p a. Bewijs dat de asymptoten van de grafiek van f elkaar in punt $P(1, 0)$ snijden.

De grafiek van f is symmetrisch in punt $P(1, 0)$ als voor welke waarde van a geldt:

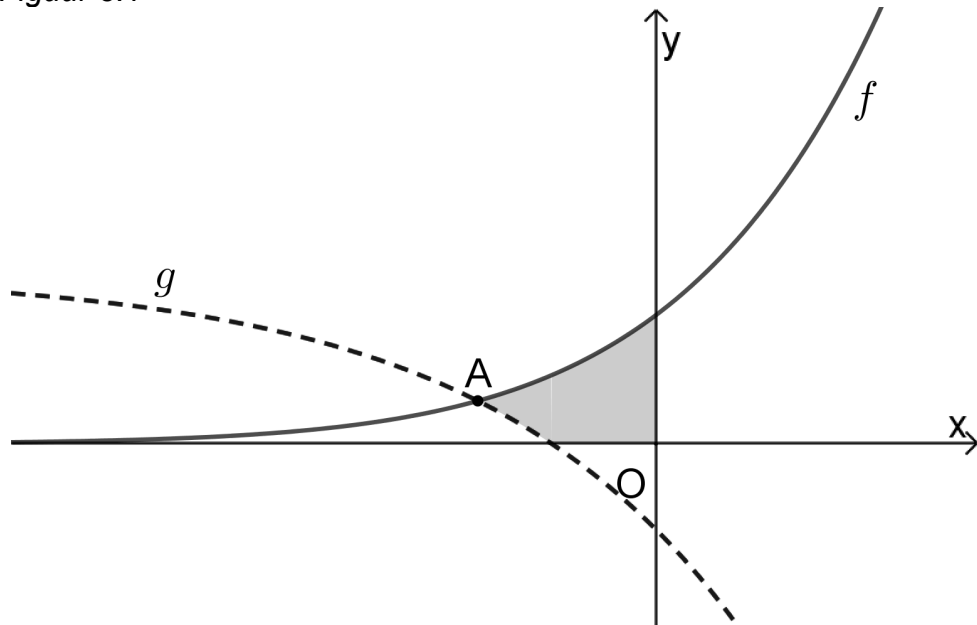
$$f(1 + a) = -f(1 - a)$$

5p b. Bewijs dat de grafiek van f symmetrisch is in punt $P(1, 0)$.

Opgave 3. Gegeven zijn de functies:

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \quad \text{en} \quad g(x) = \frac{2}{3} - e^x$$

Figuur 3.1



De grafieken van f en g snijden elkaar in één punt. Dit punt noemen we A .

- 4p a. Toon op exacte wijze aan dat de x -coördinaat x_A van punt A gelijk is aan $x_A = -\ln(2)$.
- 4p b. Bewijs dat de functie $F(x) = e^x - \ln(e^x + 1)$ een primitieve is van $f(x)$.

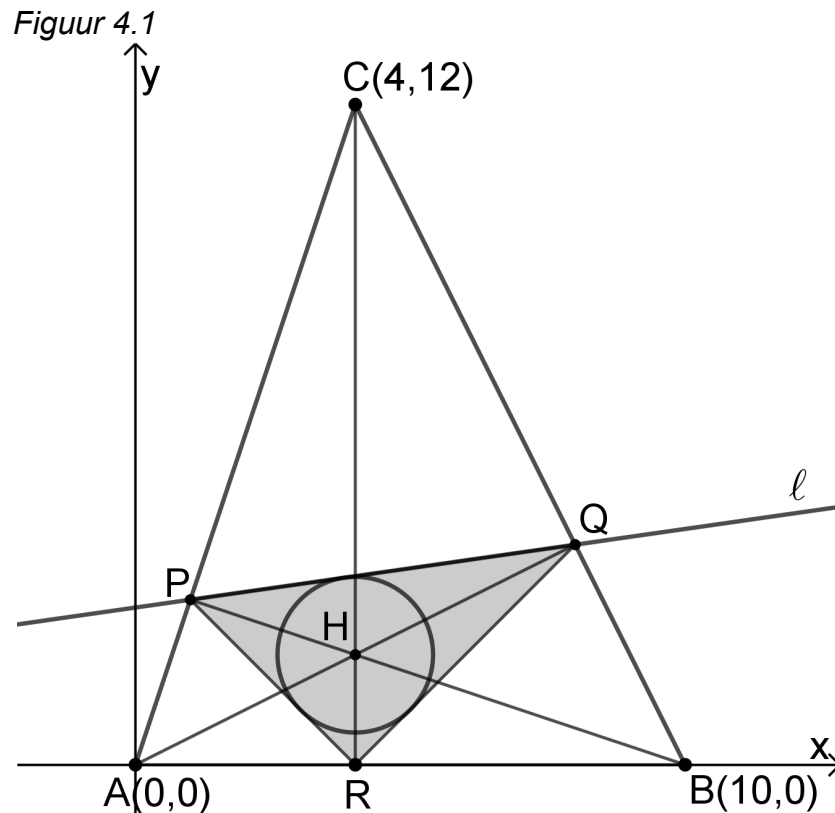
V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f , de grafiek van g , de x -as en de y -as.

In figuur 3.1 is vlakdeel V grijsgekleurd.

- 6p c. Bereken algebraïsch de oppervlakte van vlakdeel V . Geef uw antwoord exact of in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 4. Gegeven zijn lijn $\ell: 7y - x = 20$ en driehoek ΔABC met $A(0,0)$, $B(10,0)$ en $C(4,12)$.

In figuur 4.1 zijn lijn ℓ en driehoek ΔABC getekend.



Punt P is het snijpunt van lijnstuk AC en lijn ℓ . Punt P heeft coördinaten $(1,3)$.

4p a. Bewijs dat AP loodrecht op BP staat.

Punt Q is het snijpunt van lijnstuk BC en lijn ℓ .

4p b. Leid af dat de coördinaten van punt Q gelijk zijn aan $(8,4)$.

Punt H is het snijpunt van lijnstukken AQ en BP . Zie figuur 4.1.

De lijn door de punten C en H snijdt lijnstuk AB in punt R .

Er geldt:

- lijnstuk CR staat loodrecht op AB .
 - punt H is het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek ΔPQR .
- (U hoeft dit niet aan te tonen.)

6p c. Bewijs dat de ingeschreven cirkel van driehoek ΔPQR gegeven wordt door:

$$x^2 - 8x + y^2 - 4y + 18 = 0$$

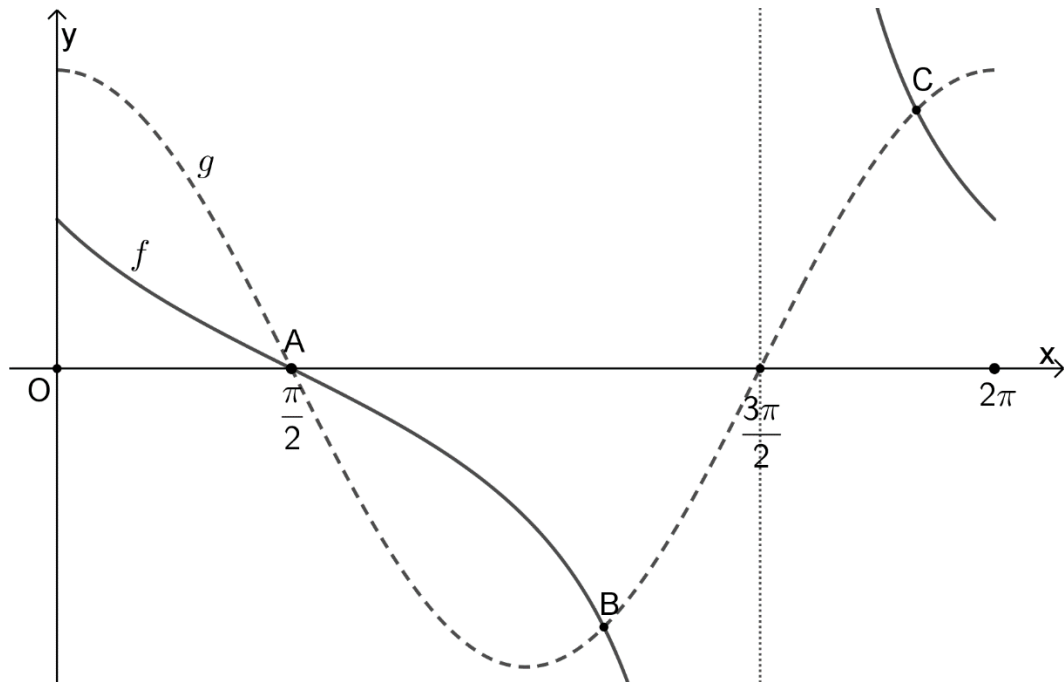
Opgave 5. Op het interval $[0, 2\pi]$ wordt de functie f gegeven door:

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x) + 1} \quad \left(x \neq \frac{3}{2}\pi\right)$$

De functie g wordt gegeven door $g(x) = 2 \cos(x)$.

In figuur 5.1 zijn de grafieken van de functies f en g getekend.

Figuur 5.1



De grafieken van de functies f en g snijden elkaar in de punten $A \left(\frac{1}{2}\pi, 0\right)$, B en C .

6p a. Bereken exact de x -coördinaten van de punten B en C .

5p b. Bewijs dat:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sin(x) + 1}$$

De raaklijn aan de grafiek van f in punt $A \left(\frac{1}{2}\pi, 0\right)$ snijdt de y -as in punt P .

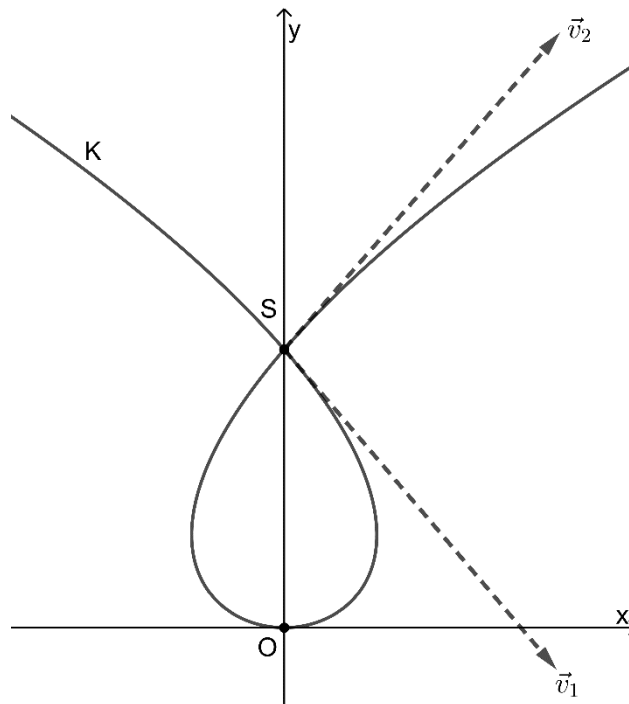
4p c. Toon op exacte wijze aan dat de afstand tussen punt A en punt P gelijk is aan $\frac{\pi}{4}\sqrt{5}$.

Opgave 6. De beweging van punt P door het vlak wordt gegeven door:

$$P: \begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = 2t^2 \end{cases}$$

De baan van punt P noemen we kromme K . In figuur 6.1 is kromme K getekend.

Figuur 6.1



Punt P passeert punt $S(0,6)$ twee keer. De eerste keer met snelheidsvector \vec{v}_1 , de tweede keer met snelheidsvector \vec{v}_2 .

- 6p a. Bereken algebraïsch de hoek in graden tussen \vec{v}_1 en \vec{v}_2 . Rond uw antwoord af op twee decimalen.

Er zijn drie tijdstippen waarop de snelheidsvector $\vec{v}(t)$ van punt P loodrecht op de versnellingsvector $\vec{a}(t)$ van punt P staat.

- 7p b. Bereken op exacte wijze de coördinaten van punt P op deze drie tijdstippen.

Kromme K heeft twee verticale raaklijnen.

- 4p c. Bereken exact de afstand tussen deze twee raaklijnen.

EINDE